数理解析研究所講究録
784巻 1992年 28-39


# 無限次元に対するコンパクト化定理

埼玉大学教育学部　木村　孝 (Takashi Kimura)

## 1. trind について

この節では、空間はすべて Tychnoff space とする。

1.1. **定義**　空間 $X$ に対し、ind $X$ (trind $X$) をそれぞれ次で定義する。但し、$n$ は 0 以上の整数 ($\alpha$ は順序数) とする。

| | | |
|---|---|---|
| ind $X = -1$ (trind $X = -1$) | $\Leftrightarrow$ | $X = \emptyset$ |
| ind $X \leqq n$ (trind $X \leqq \alpha$) | $\Leftrightarrow$ | 任意の点 $x \in X$ と $x$ の任意の近傍 $U$ に対し、ind Bd $V < n$ (trind Bd $V < \alpha$), $V \subset U$ となる $x$ の近傍 $V$ が存在する。 |
| ind $X = n$ (trind $X = \alpha$) | $\Leftrightarrow$ | ind $X \leqq n$ かつ ind $X \nless n$ (ind $X \leqq \alpha$ かつ ind $X \nless \alpha$) |
| ind $X = \infty$ (trind $X = \infty$) | $\Leftrightarrow$ | ind $X \leqq n$ となる $n$ (trind $X \leqq \alpha$ となる $\alpha$) は存在しない。 |
| $X$ は ind (trind) をもつ | $\Leftrightarrow$ | ind $X \neq \infty$ (trind $X \neq \infty$)。 |

任意の可分距離空間 $X$ に対し、ind $\alpha X$ = ind $X$ となる $X$ の距離化可能なコンパクト化 $\alpha X$ が存在することはよく知られているが、Luxemburg [11] は trind $\alpha X$ = trind $X$ となる距離化可能なコンパクト化 $\alpha X$ が存在しない可分距離空間 $X$ を構成した。故に、trind に関しては、一番良い形でのコンパクト化定

理は成立しないことがわかったが、次の命題が成立することは知られている。

1.2. **命題** trind をもつ可分距離空間は trind をもつ距離化可能なコンパクト化をもつ。

Luxemburg の結果と合わせて考えれば、trind が一致するコンパクト化の存在は望めないが、trind をもつ、という条件に関しては、コンパクト化定理が成立することがわかる。また、命題1.2 のより精密な形として、任意の順序数 $\alpha$ に対し順序数 $\beta(\alpha)$ が定まり、trind $X \leqq \alpha$ となる任意の可分距離空間 $X$ に対し trind $\alpha X \leqq \beta(\alpha)$ となる距離化可能なコンパクト化 $\alpha X$ が存在することが Pol [14] の結果より知られている。

上の命題が、可分距離空間だけではなく、一般の空間に対しても成立するか否かという問題が自然に考えられるが、ind の場合に関しては、否定的であることが、van Mill and Przymusinski [12] によって示されている。

彼らは ind $X = 1$ となる空間 $X$ で、$X$ の任意のコンパクト化は ind をもたないものを構成した。しかし、彼らの証明では、$X$ の任意のコンパクト化 $\alpha X$ に対し、ind $\alpha X \nleqq n$ ($\forall n \in N$) となることを示しているだけなので（彼らの方法は、順番に小さくなっていく稠密集合を次々にとる操作をし、これは有限回しか行えないので、そのまま一般の順序数に拡張することは不可能)、ind $\alpha X = \infty$（すなわち、$\alpha X$ は ind をもたないこと）は示すことができるが、trind $\alpha X \geqq \omega$ となるだけで、trind をもつコンパクト化 $\alpha X$ が存在する可能性を否定することができない。

van Mill and Przymusinski の方法を修正することで、次の結果を得た。

1.3. **例**(Kimura [9]) trind $X = 1$ となる空間 $X$ で、$X$ の全てのコンパクト化は trind をもたないものが存在する。

van Mill and Przymusinski [12] は、彼らの example を Pol and Pol [13] の hereditarily normal strongly dimensional space containig subspaces of arbitrarily large dimension から再構成したが、上の例1.3 は Dowker [6] の

構成した空間から始めて、van Mill and Przymusinski の方法を修正することで得られるので、最初に Dowker の構成した空間を説明する。

1.4. **例**(Dowker [6]) $I = [0, 1]$ とし、$x, y \in I$ に対し、

$$x \sim y \iff x - y \text{ は有理数}$$

とする。このとき、明らかに $\sim$ は同値関係となる。

$$\{Q_\alpha : \alpha < c\}$$

を $\sim$ に関する同値類全体の集合とし、

$$I_\alpha = I - \cup\{Q_\beta : \alpha < \beta < \omega_1\}$$

$$M = \cup\{\{\alpha\} \times I_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

とおく。$M$ を $\omega \times I$ の subspace とみたものが、Dowker's example である。

$$A = (\omega_1 \times \{0\}) \cap M$$

$$B = (\omega_1 \times \{1\}) \cap M$$

とおく。

Dowker はこの $A$ と $B$ が空集合では分離できないことを示し

$$\operatorname{ind} M = \operatorname{locdim} M = \operatorname{locInd} M = 0,\ \dim M = \operatorname{Ind} M = 1$$

となることを示した。

では、例1.3 の空間を構成しよう。

1.5. **構成**

$$\pi_\alpha : M^c = \prod_{\alpha < c} M_\alpha \to M_\alpha = M$$

を $\alpha$-th projection とし、(但し、$c$ は連続体濃度、$M_\alpha$ は $M$ の copy)

$$A_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(A)$$

$$B_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(B)$$

とおく。

C を I の中の標準的な Cantor set とし、D を countable dense subset of C とする。$\phi : C \to c$ を bijection とする。但し、連続体濃度 c は c より小さい ordinal number 全体の集合とみる。$\alpha < c$ と $n < \omega$ に対し、

$$F(\alpha, n) = \pi_{\alpha}^{-1}((\omega_1 \times [1/n. 1]) \cap M)$$

とおく。任意の $t \in C$ に対し、$D - \{t\}$ の countable subset $Q(t) = \{q_n(t) : n \in N\}$ で $q_n(t)$ が t に収束するものをとる。

$$X = (D \times M^C) \cup (C \times \{\theta\})$$

とおく。但し、$\theta$ は $\theta \notin M^C$ となる点とする。 $x = (t, y) \in D \times M^C$ に対し、

$$\mathcal{B}(x) = \{\{t\} \times U : U \text{ は } y \text{ の } M^C \text{ に於ける開近傍}\}$$

とおく。$x = (t, \theta) \in C \times \{\theta\}$ に対し、

$$V_n(t) = ((B(t, 1/n) \times (M^C \cup \{\theta\})) -$$
$$((\{t\} \times M^C) \cup (Q(t) \times F(\phi(t), n)))) \cap X$$

(但し、$B(t, r)$ は r-neighborhood of t in C とする)

$$\mathcal{B}(x) = \{V_n(t) : n < \omega\}$$

とおく。$\{\mathcal{B}(x) : x \in X\}$ を neighborhood base system として X に位相を入れる。この X が求める空間である。

この空間 X が Tychonoff であること、及び trind $X \leqq 1$ であることは、標準的な方法で確かめることができる。X の任意のコンパクト化が trind をもたないことを示すために、次の補題を必要とする。

1.6. **補題**(Fedorcuk [7]) trind をもつ任意のコンパクト空間は trInd をもつ。

trInd をもつ空間は、weakly infinite-dimensional なので、上の補題より、

X の任意のコンパクト化が、trind をもたないことを示すためには、weakly infinite-dimensional でないことを示せばよい。

また、次の補題も必要とする。

1.7. **補題**(Kimura [9]) c の任意の有限部分集合 $\Lambda$ に対し、$\{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$ は essential である。

この補題は、Dowker による A と B が空集合で分離できないことの証明を、さらに精密化することで得ることができる。

1.8. **定理**(Kimura [9]) X の任意のコンパクト化は trind をもたない。

証明　$\alpha X$ を X のコンパクト化とする。任意の $t \in C$ に対し、

$$V_1(t) = U \cap X,\ (t, \theta) \in W \subset Cl_{\alpha X}W \subset U$$

となる $\alpha X$ の開集合 U, W をとる。このとき、

$$V_n(t) \subset W$$

となる $n \in N$ をとれば、$q_n(t) \to t$ であることより、

$$y(t) \in Q(t) \cap B(t, 1/n)$$

を1つとることができる。

$\psi : C \to D$ を $\psi(t) = y(t)$ で定義する。このとき、

$$Cl_{\alpha X}(\{\psi(t)\} \times A_{\phi(t)}) \subset Cl_{\alpha X}V_n(t) \subset Cl_{\alpha X}W \subset U$$

$$Cl_{\alpha X}(\{\psi(t)\} \times B_{\phi(t)}) \subset \alpha X - U$$

より、

$$Cl_{\alpha X}(\{\psi(t)\} \times A_{\phi(t)}) \cap Cl_{\alpha X}(\{\psi(t)\} \times B_{\phi(t)}) = \emptyset$$

となる。ところで、D は可算であることより、$\psi^{-1}(t)$ が無限となる $t \in D$ が存在する。$\{t_i : i < \omega\}$ を $\psi^{-1}(t)$ の可算無限部分集合とすれば

$$\{(Cl_{\alpha X}(\{t\} \times A_{\phi(t_i)}), Cl_{\alpha X}(\{t\} \times B_{\phi(t_i)})) : i < \omega\}$$

は、collection of pairs of disjoint closed subsets of $Cl_{\alpha X}(\{t\} \times M^c)$ となる。

$\alpha X$ が weakly infite-dimensional と仮定すれば、$Cl_{\alpha X}(\{t\} \times M^c)$ も weakly infinite-dimensional となる。よって、特に

partition $L_i$ in $M^c$ between $A_{\phi(t_i)}$ and $B_{\phi(t_i)}$ で

$\cap\{L_i : i < n]$ for some $n < \omega$

となるものが存在することになるが、補題1.7 よりこれは不可能。故に $\alpha X$ は weakly infinite-dimensional ではなく $\alpha X$ は trind をもたないことがわかる。

## 2. trdim について

この節では、空間はすべて normal space とする。

normal space に対しては、covering dimension は partition で特徴づけることができるので、covering dimension で無限だが、比較的弱い無限次元の概念として、この特徴づけを利用した、Smirnov の意味での弱い無限次元 (weakly infinite-dimensional in the sense of Smirnov); S-w.i.d. と Alexandrovの意味での弱い無限次元 (weakly infinite-dimensional in the sense of Alexandrov); A-w.i.d. という２つの概念がある。inductive dimension の概念では、trind をもつ、あるいは、trInd をもつという概念がこれに相当する。covering dimension に対してだけは、 ordinal に対して定義される、より細かい分類がなかった。これに対し、最近 Borst [1] が partition をうまく利用することで、S-w.i.d. な空間に対しても超限的に分類する定義を与えた。この節で

は、Borst の定義した無限次元に関するコンパクト化定理について解説する。

2.1. **定義** 集合 L に対して、

$$\mathrm{Fin}\ L = \{\sigma \subset L : 0 < |\sigma| < \omega\}$$

とおく。

$M \subset \mathrm{Fin}\ L$, $\sigma \in \mathrm{Fin}\ L \cup \{\emptyset\}$ に対し

$$M^{\sigma} = \{\tau \in \mathrm{Fin}\ L : \sigma \cup \tau \in M,\ \sigma \cap \tau = \emptyset\}$$

とおく。特に $\sigma = \{a\}$ のときは、$M^{a}$ とかく。

2.2. **定義** 上の、L, M に対し M の Order; Ord M を次のように定義する。但し、$\alpha$ は ordinal とする。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ord}\ M = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad M = \emptyset \\
\mathrm{Ord}\ M \leqq \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{任意の } a \in L \text{ に対し } \mathrm{Ord}\ M^{a} < \alpha \\
\mathrm{Ord}\ M = \alpha \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ord}\ M \leqq \alpha \text{ かつ } \mathrm{Ord}\ M \not< \alpha \\
\mathrm{Ord}\ M = \infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{任意の ordinal } \alpha \text{ に対し } \mathrm{Ord}\ M\ M \nleqq \alpha
\end{aligned}$$

2.3. **定義** 空間 X に対し

$$L(X) = \{(A, B) : A, B \text{ は disjoint closed subsets of } X\}$$

$$M_{L(X)} = \{\sigma \in \mathrm{Fin}\ L(X) : \sigma \text{ は essential}\}$$

とおき、trdim を次で定義する。

$$\mathrm{trdim}\ X = \mathrm{Ord}\ M_{L(X)}$$

trdim も trind, trInd と同様に、有限の場合は dim と一致してほしいが、実際、trdim と dim は有限の場合一致することが知られている。

また、trdim に関しては、次が知られている。

2.4. 定理(Borst [1]) 空間 $X$ が S-w.i.d. であるための必要十分条件はある ordinal $\alpha$ に対し $\mathrm{trdim}\, X \leq \alpha$ となることである。

著者は、以前 trdim に関して次のコンパクト化定理が成立することを示した。

2.5. 定理(Kimura [8]) 任意の空間 $X$ に対し $\mathrm{trdim}\, \alpha X \leq \mathrm{trdim}\, X$、$w(\alpha X) \leq w(X)$ となる $X$ のコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。

この定理は、後に Chatyrko [4] と Yokoi [15] によって、Psaynkov の Factorization Theorem を trdim に関して証明することで、その系として再証明された。

定理2.5 で $w(\alpha X) \leq w(X)$ は、$w(\alpha X) = w(X)$ と同値であるが、$\mathrm{trdim}\, \alpha X \leq \mathrm{trdim}\, X$ は $\mathrm{trdim}\, \alpha X = \mathrm{trdim}\, X$ と同値ではない。実際 Borst [3] によって trdim に関して部分集合定理が成立しない例が構成されている。

2.6. 例(Borst [3]) $\mathrm{trdim}\, X = \omega$, $\mathrm{trdim}\, Y = \omega + 1$ となるコンパクト距離空間 $X$ と $X$ の部分集合 $Y$ が存在する。

dim, Ind, trInd に関しては定理2.5 に相当するコンパクト化定理が次元に関しても等号の形で成立するので、trdim に対しても等号の形で成立することが望まれる。実際 Chatyrko は特別な場合には等号が成立することを示している。

2.7. 定理(Chatyrko [5]) $\mathrm{trdim}\, X = \alpha$ となる空間 $X$ に対し、essential map $f: X \to J^{\alpha}$ が存在すれば $\mathrm{trdim}\, \alpha X = \alpha$ $(= \mathrm{trdim}\, X)$, $w(\alpha X) = w(X)$ となる $X$ のコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。但し、$J^{\alpha}$ は Henderson's $\alpha$-cube である。

0 以上の有限な整数 $n$ に対しては、$\dim X \geq n$ であるための必要十分条件は

essential map $f:X \to I^n$ が存在することであるので、有限の順序数 n に対しては定理2.7 で essential map の存在の条件ははずすことができるが、一般の順序数に関しては trdim と essential map の関係については次が成り立つ。

2.8. 定理(Borst [2]) (a) essential map $f:X \to J^\alpha$ が存在すれば、trdim $X \geqq \alpha$ が成り立つ。

(b) trdim $X \geqq \alpha + 1$ ならば、essential map $f:X \to J^\alpha$ が存在する。

(c) $\alpha$ が極限順序数のとき、trdim $X \geqq \alpha$ であるための必要十分条件は essential map $f:X \to J^\alpha$ が存在することである。

定理2.8 より定理2.7 は次のように書くことができる。

2.9. 定理(Chatyrko [5]) trdim $X = \alpha$ のとき、

(a) $\alpha$ が極限順序数ならば、trdim $\alpha X$ = trdim $X$, $w(\alpha X) = w(X)$ となるコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。

(b) $\alpha$ が孤立順序数で $\alpha = \beta + 1$ となるとき、$\beta \leqq$ trdim $\alpha X \leqq \beta + 1 = \alpha$ = trdim $X$, $w(\alpha X) = w(X)$ となるコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。

この結果より、trind X が極限順序数のときは、コンパクト化定理が成立し、trind X が孤立順序数のときは、高々1つしか次元が下がらない形でのコンパクト化定理が成立することを示している。

等号の成立に関しては、著者による以前の証明を改良することで次の部分解を得た。

2.10. 定理(Kimura [10]) metacompact S-w.i.d. space X に対し trdim $\alpha X$ = trdim X、$w(\alpha X) = w(X)$ となる X のコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。

この定理で、metacompact の条件は落とすことが望まれる。この定理の証明には次の補題を、本質的に利用しており、その補題で metecompact の条件を point-finite sum theorem を適用するために使っており、現在のところ、落とすことができない。次の補題で、S-w.i.d. の条件は定理2.4 より当然必要なものである。

2.11. **補題**(Kimura [10]) metacompact S-w.i.d. space $X$ に対し trdim $\alpha X < w(X)^+$ が成り立つ。但し、$w(X)^+$ は $w(X)$ の次の cardinal number とする。

上の補題で、metacompact でない空間 $X$ で trdim $X \geq w(X)^+$ となるものが存在すれば $w(\alpha X) = w(X)$ となる任意のコンパクト化 $\alpha X$ に対し

$$\mathrm{trdim}\ \alpha X < w(\alpha X)^+ \leq \mathrm{trdim}\ X$$

より、trdim $\alpha X$ = trdim $X$, $w(\alpha X) = w(X)$ となるコンパクト化 $\alpha X$ は存在しないことがわかる。

著者は、以前次の問題を提出した。

2.12. **問題**(Kimura [8]) $\{h \in C(X, I^{\omega}) : h$ is an embedding, $\mathrm{trdim}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trdim}\ X\}$ は $C(X, I^{\omega})$ で residual か?

この問題が肯定的に解決されれば、Luxemburg [11] は $X$ が trInd をもてば

$\{h \in C(X, I^{\omega}) : h$ is an embedding, $\mathrm{trInd}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trInd}\ X\}$

は $C(X, I^{\omega})$ で residual であること、また

$\{h \in C(X, I^{\omega})$: $h$ is an embedding, $\mathrm{trind}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trind}\ X\}$

も $C(X, I^{\omega})$ で residual であること示しているので、

$\{h \in C(X, I^{\omega}) : h$ is an embedding, $\mathrm{trind}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trind}\ X$, $\mathrm{trInd}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trInd}\ X$, $\mathrm{trdim}(\mathrm{Cl}h(X)) \leq \mathrm{trdim}\ X\}$

も $C(X, I^{\omega})$ で residual になり、可分距離空間に対しては、どの次元も上げない距離化可能なコンパクト化の存在まで示すことができることを指摘した。問題 2.13 は依然未解決であるが、可分距離空間に対し、どの次元も上げない距離化可能なコンパクト化の存在を示すことはできた。

2.13. 定理(Kimura [10]) trInd をもつ可分距離空間 $\alpha X$ に対し、$\mathrm{trdim}\ \alpha X = \mathrm{trdim}\ X$, $\mathrm{trind}\ \alpha X = \mathrm{trind}\ X$, $\mathrm{trInd}\ \alpha X = \mathrm{trInd}\ X$ となる距離化可能なコンパクト化 $\alpha X$ が存在する。

# REFERENCES


[1] P. Borst, Classification of weakly infinite-dimensional spaces Part I: A transfinite extension of the covering dimension, Fund. Math. 130(1988), 1-25.

[2] P. Borst, Classification of weakly infinite-dimensional spaces Part II: Essential Mappings, Fund. Math. 130(1988), 73-99.

[3] P. Borst, On weakly infinite-dimensional subspaces, preprint.

[4] V. A. Chatyrko, On the transfinite dimension dim, Questions Answers Gen. Top. 9(1991), 177-194.

[5] V. A. Chatyrko, A transfinte extension of the relative dimension d, preprint.

[6] C. H. Dowker, Local dimension on normal spaces, Quart. J. Math. Oxford (2), 6(1955), 101-120.

[7] V. V. Fedorcuk, Infinite-dimensional compact Hausdorff spaces, Math. USSR Izvestija 13(1979), 445-460.

[8] T. Kimura, Compactification and product theorems for Borst's transfinite dimension, preprint.

[9] T. Kimura, A space $X$ with trind $X = 1$ every compactification of which has no trind, preprint.

[10] T. Kimura, Compactification theorem for Borst's transfinite dimension, in preparation.

[11] L. Luxemburg, On compactifications of metric spaces with transfinite dimensions, Pacific J. Math. 101(1982), 399-450.

[12] J. van Mill and T. C. Przymusinski, There is no compactification theorem for the small inductive dimension, Top. Appl. 13(1982), 133-136.

[13] E. Pol and R. Pol, A hereditarily normal strongly zero-dimensional space containing subspaces of arbitararily large dimension, Fund. Math. 102(1979), 137-142.

[14] R. Pol, Countable dimensional universal sets, Trans. Amer. Math. Soc. 297(1986), 255-268.

[15] K. Yokoi, Compactification and factorization theorems for transfinite covering dimension, Tsukuba J. Math. 15(1991), 389-395.